Лопухов П.В. (Казань)

Граничные задачи для упругой плоскости с отверстием, ограниченным фрактальной кривой

1. Итерации рациональных отображений.

Рассмотрим основные понятия теории итераций рациональных отображений [1].

Пусть рациональное отображение $R(x) = P(x)/Q(x)$ действует на расширенной комплексной плоскости, $R(x) : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ и $R^n(x) = R(R(\ldots R(x)))$ – n-ая итерация отображения $R(x)$. Положительной полутраекторией точки x_0 относительно $R(x)$ называется множество

$$O_{r+}(x_0) = \{x_k \in \overline{\mathbf{C}} : x_k = R^k(x_0), k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

и отрицательной полутраекторией точки x_0 относительно $R(x)$ – множество

$$O_{r-}(x_0) = \{x \in \overline{\mathbf{C}} : x_0 = R^k(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Если $x_n = x_0$ в $O_{r+}(x_0)$ при некотором $n > 0$, то точку x_0 называют периодической с периодом n. В этом случае множество $O_{r+}(x_0)$ называют циклом. Множество

$$\gamma = \{x_0, R(x_0), \ldots, R^{n-1}(x_0)\}$$

– n-периодический цикл. Если $n = 1$, то $R(x_0) = x_0$ и x_0 – неподвижная точка отображения $R(x)$. Если x_0 – периодическая точка с периодом n, то она будет неподвижной точкой отображения $R^n(x)$.

Пусть x_0 – периодическая точка с периодом n. Число $\lambda = ((R^n)'(x_0))$ называется собственным значением точки x_0. Все точки цикла $O_{r+}(x_0)$ имеют одно и то же собственное значение. Точка x_0 называется сверхпритягивающей, если $|\lambda| = 0$, притягивающей при $0 < |\lambda| < 1$, нейтральной, если $|\lambda| = 1$ и отталкивающей, если $|\lambda| > 1$. Пусть P – множество всех периодических отталкивающих точек отображения $R(x)$. Тогда множеством Жулиа J_R отображения $R(x)$ называют замыкание множества P, $J_R = \overline{P}$.

Если x_0 – притягивающая точка отображения $R(x)$, то ее бассейн притяжения – множество

$$A(x_0) = \{x \in \overline{\mathbf{C}} : R^k(x) \to x_0, k \to \infty\}.$$

Если $\gamma = \{x_0, R(x_0), \ldots, R^{n-1}(x_0)\}$ – n-периодический притягивающий цикл, то каждая из неподвижных точек $R^k(x_0)$ отображения $R(x)$ имеет свой бассейн притяжения. Множество $A(\gamma)$ – объединение этих бассейнов.

Перечислим ряд свойств множества Жулиа J_R :

- J_R непусто и содержит более чем счетное множество точек.
- Множества J_R отображений $R(x)$ и $R^k(x)$ совпадают при $k = 2, 3, \ldots$
- $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$.
- $\forall x \in J_R$ множество $O_{r-}(x)$ плотно в J_R.
- Если γ-притягивающий цикл отображения $R(x)$, то $A(\gamma) \in F_R = \overline{\mathbf{C}} - J_R$, $\partial A(\gamma) = J_R$
- Если множество J_R имеет внутренние точки, то $J_R = \overline{\mathbf{C}}$.

Множество X называется фрактальным, если его размерность Хаусдорфа $h(X)$ не является целым числом. Величина $h(X)$ оценивает рост числа множеств диаметра ϵ, необходимых для того, чтобы покрыть X при $\epsilon \to 0$. Более точно, пусть $X \in R^m$ и $n(\epsilon)$ – число m – мерных шаров диаметра ϵ, покрывающих множество X. Тогда, если $n(\epsilon)$ растет как $n(\epsilon)$ ϵ^{-D}, то X имеет размерность Хаусдорфа D.

Пусть X – подмножество метрического пространства, число $d > 0$. По определению d-мерная внешняя мера $m_d(X)$

$$m_d(X, \epsilon) = \inf\Big\{\sum_{i \in I}(\text{ diam } S_i)^d\Big\},$$

нижняя грань берется по всем конечным покрытиям множества X множествами S_i с диаметрами, меньшими $\epsilon > 0$. Далее, пусть $m_d(X) = \lim_{\epsilon \to 0} m_d(X, \epsilon)$. Величина $m_d(X)$ может быть, в зависимости от d, конечной или бесконечной. Хаусдорф показал, что существует единственное значение $d = d^*$, при котором величина $m_d(X)$ с ростом d становится конечной,

$$h(X) = \sup\{d \in \mathbf{R}_+ : m_d(X) = \infty\}.$$

Рассмотрим частный случай рациональных отображений вида $R(z) = z^2 + c = p_c(z)$ где $c \in \overline{\mathbf{C}}$. Классификацию множеств Жулиа J_c, отвечающих различным значениям c, можно дать с помощью множества Мандельброта.

Точка $z = \infty$ является сверхпритягивающей неподвижной точкой отображения $p_c(z)$. Следовательно, $\forall c \in \mathbf{C}$ множество Жулиа $J_c = \partial A$. Из теории Жулиа и Фату следует, что J_c либо связно, либо является канторовым множеством. Тогда определим множество $M = \{c \in \mathbf{C} \mid \mathbf{J_C}$ связно $\}$. Основные черты динамики рационального отображения вытекают из поведения положительных полутраекторий его критических точек. Критической точкой отображения $R(z)$ называется точка $c \in \overline{\mathbf{C}}$, для которой уравнение $R(z) - c = 0$ имеет нуль кратности больше единицы. Конечные критические точки являются решениями уравнения $R'(z) = 0$. Известно, что любой притягивающий цикл имеет в своем бассейне притяжения хотя бы одну критическую точку. Но $p_c(z)$ имеет две критические точки: $z = 0$ и $z = \infty$, не зависящие от c. Точка $z = \infty$ сама является притягивающей неподвижной точкой, так что свойства J_c можно определить, исходя из поведения положительной полутраектории точки $z = 0$. Множество J_c является связным, когда $0 \notin A(\infty)$ и

$$M = \{c \in \mathbf{C} : p_c^k(c) \to q, k \to \infty, |q| < \infty\}.$$

2. Граничные задачи для плоскости с отверстием.

Рассмотрим бесконечную плоскость из упругого материала. Предположим, что в ней имеется отвестие в форме множества Жулиа J_c, $c \in M$. Выберем $\epsilon > 0$ и рассмотрим некоторое множество J_c^ϵ с гладкой границей, приближающее J_c с точностью ϵ (это множества будет построено ниже). Рассмотрим первую и вторую краевые задачи двумерной теории упругости [2] для такого множества. Через $\mathbf{F_n} = X_n + iY_n$ обозначим внешние напряжения, а через $g = u + iv$ – смещения. Первая краевая задача сводится к отысканию двух аналитических в $z \in (J_c^\epsilon)^c$ функций $\phi(z)$ $\psi(z)$, связанных на границе ∂J_c^ϵ условием

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f(z), \tag{1}$$

здесь $f(x) = i\int_{z_0}^{z} \mathbf{F_n} ds$ - заданная на ∂J_c^ϵ функция. В случае второй краевой задачи имеем на контуре условие

$$\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu g(z), \tag{2}$$

здесь κ и μ постоянные, $g(z)$ заданная функция. Предположим также, что главный вектор внешних напряжений, приложенных к контуру, а также напряжения на бесконечности обращаются в нуль, что гарантирует правильность функций на бесконечности. Кроме этого считаем, что $\phi(\infty) = 0$.

Построим конформное отображение J_c на внешность единичного круга. Из теории множеств Жулиа J_c для отображения $p_c(z) = z^2 + c$ известно, что конформное отображение $\psi_c(z)$: $(J_c)^c \rightarrow D^c$, где $D = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| \leq 1\}$, сопрягает $p_c(z)$ с $p_0(z)$, то есть

$$\phi_c(p_c(\phi_c^{-1}(\zeta))) = p_0(\zeta), \quad \zeta \in D^c. \tag{3}$$

Отсюда следует функциональное уравнение для определения ϕ_c^{-1}

$$(\phi_c^{-1}(\zeta))^2 + c = \phi_c^{-1}(\zeta^2). \tag{4}$$

Представим ϕ_c^{-1} в виде ряда

$$\phi_c^{-1}(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{\zeta^k}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим уравнения для определения коэффициентов c_{-k}. Из них следует, что $c_{-2k} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а

$$c_{-(2k+1)} = \frac{1}{2}(c_{-k} - \sum_{k=1}^{2m+1} c_{1-k}c_{k-(2m+1)}). \tag{6}$$

В частности,

$$c_{-1} = -\frac{c}{2}, \quad c_{-3} = -\frac{c}{4} - \frac{c^2}{8}, \quad c_{-5} = -\frac{c}{2}\left(\frac{c^2}{8} + \frac{c}{4}\right).$$

Отображение $\phi_c z$ построено в [1], оно имеет вид

$$\zeta = \phi_c(z) = \lim_{n\to\infty} exp(\frac{1}{2^n}\ln p_c^n(z)).$$

По отображению $\phi_c^{-1}(\zeta)$ легко построить множество J_c^ϵ, так как его дополнение

$$z \in (J_c^\epsilon)^c = \phi_c^{-1}((1+\epsilon)\zeta) \quad \zeta \in D^c.$$

Таким образом, найдено отображение

$$\omega_c^\epsilon(\zeta) : D^c \to (J_c^\epsilon)^c.$$

Определим вместе с ним отображение $(\omega_c^\epsilon)^{-1}(z)$ J_c^ϵ на внешность единичного круга D^c

$$\zeta = (\omega_c^\epsilon)^{-1}(z) = \frac{1}{1+\epsilon}\phi_c(z), \quad z \in J_c^\epsilon.$$

Перейдем от краевых задач для J_c^ϵ к задачам для единичного круга.

Пусть $z = \omega_c^\epsilon(\zeta) : D^c \to (J_c^\epsilon)^c$ - конформное отображение внешности единичного круга на внешность множества $J_c\epsilon$. Обозначим $\omega(\zeta) = \omega_c^\epsilon(\zeta)$ и перепишем краевое условие (1) в виде

$$\Phi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} = F(\zeta), \quad \zeta \in \partial D. \tag{7}$$

Воспользовавшись тем, что функция $\Psi(\zeta)$ аналитична вне круга D, получим следующее уравнение (с учетом того, что $\Phi(\infty) = 0$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta = \Phi(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta. \tag{8}$$

Представим $\Phi(\zeta)$ в виде

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}\phi_k\tau^{-k}.$$

При $|\tau| > 1$ имеем

$$\zeta - \tau = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^k}{\tau^{k+1}}.$$

Подставляя эти ряды в уравнение (8), получим следующую систему уравнений

$$F_{m-1} = \Phi_m + \sum_{l=1}^{\infty} A_{ml}\overline{\Phi_l}, \quad m = \overline{1,\infty}, \tag{9}$$

где

$$F_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} F(\zeta)\zeta^m d\zeta, \tag{10}$$

$$A_{ml} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\zeta^{m+l} l d\zeta. \tag{11}$$

Редуцировав ряды, мы получим систему линейных алгебраических уравнений конечной размерности. По $\Phi(\tau)$ можно найти $\Psi(\zeta)$ на $|\zeta| = 1$ исходя из условия (1), а затем построить значения этой функции для $|\tau| > 1$:

$$\Psi(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta + \Psi(\infty).$$

Применяя обратное отображение $(\omega_c^\epsilon(z))^{-1}$, получим искомые функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$.

Вторая краевая задача с условием (2) решается аналогичным образом.

Для рассмотренных выше задач разрабатывается программа численного моделирования. Ввиду большого количества однородных операций, необходимых для реализации преобразований $\omega_c^\epsilon(\zeta)$ и $\omega_c^\epsilon(\zeta))^{-1}$, программирование ведется для компьютерного кластера, работающего на базе пакета PVM (Parallel Virtual Machine).

Литература

[1] Пайтген Х.О., Рихтер П. Красота фракталов. - М.: Мир, 1993.

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973.

[3] Забрейко П. П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.